Rechnen mit ultragrossen und ultrakleinen Zahlen

Andreas Müller*

Zusammenfassung

Im 19. Jahrhundert wurde den den neuen Anforderungen an Strenge nicht mehr genügenden infinitesimalen Grössen aus der Zeit der Gründerväter der Analysis der Garaus gemacht. Erst in der Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts zeigte Robinson mit einer nicht ganz einfachen Konstruktion, dass man mit Infinitesimalen durchaus ohne logische Unsicherheiten arbeiten konnte. Nelsons Internal Set Theory hat gezeigt, dass es auch ohne aufwendige logische Konstruktionen geht, und neuere Entwicklungen illustrieren, dass man darüber hinausgehende Vorstellungen wie die von Physikern oft verwendeten "Grössenskalen" ebenfalls darin unterbringen kann.

1 Infinitesimale Grössen

Euler hat keine Hemmungen gehabt, die Potenzreihe der Exponentialfunktion aus der Grenzwertdarstellung wie folgt abzuleiten:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{i}\right)^i &= 1+\frac{i}{1}\frac{x^1}{i^1}+\frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{i^2}+\frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^3}{i^3}+\dots\\ &= 1+x+\frac{i(i-1)}{i^2}\frac{x^2}{2!}+\frac{i(i-1)(i-2)}{i^3}\frac{x^3}{3!}+\dots\end{aligned}$$

Dann hätte Euler wohl gesagt, man solle i einfach unendlich gross nehmen (lateinisch infinite), und beachten, dass für unendlich grosses i

$$\begin{aligned}\frac{i(i-1)}{i^2}&\simeq 1\\ \frac{i(i-1)(i-2)}{i^3}&\simeq 1\\ &\dots\end{aligned}$$

*University of Applied Sciences, Oberseestrasse 10, CH-8640 Rapperswil, Switzerland, Email: andreas.mueller@hsr.ch

gilt, woraus dann

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

folgt. Das Resultat ist zwar richtig, aber wir heutigen würden doch mindestens zurückfragen, ob denn die unendlich kleinen Fehler

$$1 - \frac{i(i-1)}{i^2}, \quad 1 - \frac{i(i-1)(i-2)}{i^3}, \dots$$

zusammen nicht einen grösseren Fehler erzeugen könnten. Eine unendliche Summe von unendlich kleinen Grössen kann ja durchaus etwas endliches geben, wie wir ebenfalls von den alten Meistern lernen können, wenn da ein Integral als Summe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{i-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{i}\right)\frac{1}{i}$$

berechnet wird. Ist i unendlich gross, ist $\frac{1}{i}$ unendlich klein, aber die Summe wird wieder endlich sein.

Genau diese Art von logischen Schwierigkeiten haben das Rechnen mit infinitesimalen Grössen in der Zeit ihrer Erfinder schwierig gemacht. Es gab durchaus eine Menge von Regeln, welche solchen Rechnungen richtig sind, und die Mathematiker hatten auch eine gute Intuition, alles "richtig" zu machen. Sie stützte sich darauf, dass man sich, wie de l'Hospital einst schrieb, infinitesimale Grössen nicht als feste Zahlen vorstellen dürfe, sondern als etwas sich veränderndes, das immer kleiner werde. Diese dynamische Vorstellung bedeutet auch, dass es infinitesimale Grössen gibt, die verschieden schnell gegen 0 gehen, es gibt also "verschieden infinitesimale" Grössen.

Mit dieser dynamischen Vorstellung kann man Euler wieder verstehen. In der unendlichen Summe

$$\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{x^k}{i^k}$$

geht der Summationsindex k zwar auch gegen unendlich, aber der Index i als unendlich grosse Zahl tut das noch viel schneller, so dass

$$\binom{i}{k}\frac{1}{i^k} = \frac{i(i-1)(i-2)\dots(i-k)}{i^k}\frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}$$

"immer" gilt.

Die im 19. Jahrhundert von Weierstrass, Dedekind und Cantor in die Analysis oder vielmehr in die Konstruktion der reellen Zahlen eingebrachte Strenge trägt diesen Ideen jedoch keine Rechnung mehr. In einer Konstruktion der reellen Zahlen mit Interval-Schachtelungen ist schlicht kein Platz mehr für etwas, was sich verändert.

2 Robinsons Nonstandard Analysis

In der Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts fand Abraham Robinson eine Möglichkeit, die “Dynamik” wieder in die reellen Zahlen zurückzubringen. Allerdings entstand dabei eine neue grössere Menge $*\mathbb{R}$ für die alle bekannten Gesetze der reellen Zahlen ebenfalls galten. Für die Logiker war damit klar: die Menge $\mathbb{R}$, die Weierstrass und andere unzweideutig konstruiert zu haben glaubten, gab es mehr als ein Modell.

Wie kann so eine Konstruktion funktionieren [3]? Wenn wir abbilden wollen, dass unendlich kleine Zahlen Dinge sind, die immer kleiner werden können, dann können wir als eine erste einfache Implementation dieser Idee Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen verwenden. Die reellen Zahlen kann man darin einbetten

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\colon\; r \mapsto (r, r, r, r, \dots)$$

Eine Grösse, die unendlich klein wird ist

$$\varepsilon = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

Wie soll man aber ε mit anderen reellen Zahlen vergleichen? Einige Elemente der Folge ε sind grösser als $\frac{1}{100}$, andere sind kleiner. Es sind aber unendlich viele kleiner, und nur endlich viele grösser. Die Menge der Indizes, für die ε grösser ist, scheint hier wenig relevant zu sein. Wir sagen, zwei Folgen sind fast überall gleich, wenn sie sich an höchstens endlich vielen Stellen unterscheiden. Analog können wir Relationen als “fast überall” erfüllt definieren, indem wir setzen

$$\begin{aligned}(a_n) > (b_n) \quad &\Rightarrow \quad \{k \in \mathbb{N} \mid \neg(a_k > b_k)\} \text{ ist endlich}\\ (a_n)\, R\, (b_n) \quad &\Rightarrow \quad \{k \in \mathbb{N} \mid \neg(a_k\, R\, b_k)\} \text{ ist endlich}\end{aligned}$$

In diesem Sinne ist ε kleiner als jede konstante Folge $(r, r, r, \dots)$ mit positivem $r \in \mathbb{R}$, wir haben also unendlich kleine Zahlen gefunden. Es gibt aber auch unendlich grosse Zahlen, denn

$$(1, 2, 3, 4, 5, \dots) > (r, r, r, r, \dots) \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichheit fast überall definiert ein Ideal D im Ring der Folgen, so dass sich die Operationen auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/D$ übertragen lassen. Ausserdem ist ein neues Prädikat entstanden: Elemente im Bild der von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ induzierten Abbildung heissen Standardelemente, sie entsprechen den “guten, alten reellen Zahlen”.

Leider entsteht so noch kein Körper, dazu müsste das Ideal maximal sein. Natürlich gibt es nach dem Zornschen Lemma immer ein maximales Ideal $D \subset M$. Damit entsteht dann ein geordneter Körper $*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/M$, der $\mathbb{R}$ enthält, aber auch davon verschieden ist.

Im vorliegenden Fall ist das maximale Ideal relativ einfach zu beschreiben. Ist a eine Folge, dann sei $Z(a) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n = 0\}$. Für die Elemente $a \in D$ gilt $|\mathbb{N} \setminus Z(a)| < \infty$, und zwei Folgen sind fast überall gleich, wenn sie auf einer Menge $Z(a)$ übereinstimmen. Die Mengen $Z(a)$ für $a \in M$, also die Elemente von

$$U = \{Z(a) \,|\, a \in M\}$$

haben folgende Eigenschaften:

1. $\emptyset \notin U$
2. $\mathbb{N} \in U$
3. $Z_1, Z_2 \in U \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in U$
4. Jeder Obermenge einer Menge in U ist in U: $Z \in U \wedge Z \subset A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$.
5. Eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ oder ihr Komplement sind in U: $A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U \vee (\mathbb{N} \setminus A) \in U$

Eigenschaften 1–4 definieren einen Filter, sie sind direkt aus den Definitionen abzuleiten. Eigenschaft 5 drückt aus, dass U ein Ultrafilter ist, sie folgt aus der Maximalität von M. Somit ist $*\mathbb{R}$ also ein Ultraprodukt.

Die Robinsonsche Nichtstandard Analysis rechtfertigt die Ideen der alten Meister im nachhinein. Der Unterschied zwischen der alten und der neuen Analysis ist aber nur sehr klein, dies drückt sich zum Beispiel im Transfer-Satz aus:

Satz 1 (Transfer)**.** *Ist $\varphi(e_0, e_1, \dots, e_n)$ eine klassische Formel dann gilt*

$$\forall x\, \varphi(x, e_1, \dots, e_n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall^{st} x\, \varphi(x, e_1, \dots, e_n)$$

wenn alle Parameter $e_1, \dots, e_n$ standard sind.

Um eine klassische Aussage zu beweisen, reicht es, sie für die Standardelemente zu beweisen.

3 Internal Set Theory

Die Menge $*\mathbb{R}$ als Erweiterung von $\mathbb{R}$ passt zu der Vorstellung, dass man die reellen Zahlen eigentlich schon gekannt hat, aber bisher einfach nicht weit genug sehen konnte, um auch die unendlich grossen Zahlen sehen zu können, oder zu wenig Auflösungsvermögen hatte, um die infinitesimalen Grössen sehen zu können.

Da $*\mathbb{R}$ nur ein anderes Modell der bereits bekannten reellen Zahlen ist, könnte man mit der gleichen Berechtigung auch sagen, dass die infinitesimalen Grössen immer schon da waren, dass wir sie einfach nicht von den "normalen" Zahlen unterschieden konnten.

Man könnte also mit der Mengenlehre beginnen, und die Existenz des Prädikats "standard", welches in der Robinsonschen Konstruktion als Nebenprodukt entstanden ist, durch geeignete Axiome fordern. Eigenschaften der Standardzahlen müssen dann zu Axiomen über das Prädikat st(·) werden. Dieses Program ist von Edward Nelson in [2] durchgeführt worden. Eine sehr gut lesbare Darstellung ist [4].

Formeln der Prädikatenlogik, die das Prädikat "standard" nicht verwenden, heissen klassisch. Alle Sätze der klassischen Mathematik sind in der neuen Theorie als "klassische" Formeln enthalten. Dazu kommen aber Sätze, die das neue Prädikat verwenden, und deshalb keine klassische Entsprechung haben. Es sei denn das Prädikat "standard" treffe für alle Objekte zu, in diesem Fall wäre die Theorie allerdings leer.

Da die Existenz von Nichtstandardelementen jetzt nicht mehr durch die Konstruktion gewährleistet ist, muss sie mit einem Axiom gefordert werden.

Axiom 3.1 (Idealisierung)**.** *Für jede klassische Relation R gilt*

$$\forall^{st\,fin} F\ \exists x\ \forall y \in F\ (x\,R\,y) \Leftrightarrow \exists x \forall^{st} y (x\,R\,y) \tag{I}$$

Offenbar ist dieser Ansatz viel allgemeiner als der Robinsonsche, es geht nicht mehr nur um eine Erweiterung der reellen Zahlen, beliebige mathematische Objekte können nicht-standard sein.

Das Axiom hat viele Verwendungen, man kann damit zeigen, dass es nicht-standard-Objekte gibt, dass eine endliche standard-Menge nur standard-Elemente enthält, oder dass eine unendliche standard-Menge notwendigerweise auch nicht-standard-Elemente enthält.

Als Beispiel zeigen wir, dass es unendlich grosse und infinitesimale Zahlen gibt. Sei R die Relation

$$x\,R\,y \quad :\Leftrightarrow \quad x < y \wedge x > 0 \wedge y > 0 \vee y \notin \mathbb{R},$$

sie ist genau dann war, wenn $x < y$ gilt oder wenn y keine reelle Zahl ist. Wir übersetzen jetzt die beiden Seiten des Axioms

$\forall^{\mathbf{st\,fin}} F\ \exists x\ \forall y \in F\ (x\,R\,y)$ bedeutet: "Zu jeder endlichen Standardmenge F gibt es eine positive Zahl x, die kleiner ist als jede positive in F enthaltene reelle Zahl"

$\exists x\ \forall^{\mathbf{st}} y\ (x\,R\,y)$ bedeutet: "Es gibt eine positive Zahl x, die kleiner ist als jede positive Standard-Zahl in $\mathbb{R}$."

Die erste Aussage ist eine Trivialität, in einer endlichen standard-Menge gibt es ja nur endlich viele standard-reelle Zahlen, die Hälfte der kleinsten davon ist ein x von der verlangten Art. Also folgt auch die zweite Aussage, es gibt infinitesimale Zahlen.

Mit dem umgekehrten Zeichen in der Relation R sieht man analog, dass es unendlich grosse Zahlen gibt.

Die in der Robinsonschen Konstruktion als Sätze erkannten Eigenschaften von Standardelementen müssen als Axiome übernommen werden, dabei zeigt sich, dass folgende zwei Axiome ausreichen.

Axiom 3.2 (Standardisierung)**.** *Ist E eine standard-Menge und P eine Eigenschaft, dann gilt*

$$\exists^{\mathrm{st}} A\ \forall^{\mathrm{st}} x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in E \wedge P(x)) \tag{S}$$

Das Axiom (S) besagt, dass man aus einer standard-Menge die Elemente auswählen kann, die eine Eigenschaft P haben, und dazu eine Standard-Menge mit den gleichen Elementen finden kann. Man kann nämlich das Prädikat $\mathrm{st}(\cdot)$ nicht in der Definition einer Menge verwenden, dazu dürfen nur klassische Formeln verwendet werden. Das Axiom (S) ist der Ersatz.

Das Axiom (S) sagt auch, dass es zu jeder Teilmenge A (möglicherweise nicht standard) einer standard-Menge E eine standard-Menge ${}^{S}A$ gibt, die gleichen standard-Elemente enthält. Als Eigenschaft verwendet man einfach $P(x) = x \in A$.

Axiom 3.3 (Transfer)**.** *Ist φ eine klassische Formel, und sind die Parameter y_i alle standard, dann gilt*

$$\forall^{\mathrm{st}} x\ \varphi(x, y_1, \dots, y_n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\ \varphi(x, y_1, \dots, y_n) \tag{T}$$

Die Nichtstandard Analysis erhält so ein neues Fundament, und die relative Konsistenz des Axiomensystems ist dadurch sichergestellt, dass ein Modell dafür in $*\mathbb{R}$ ja bereits konstruiert wurde. Es gibt viele Leute, die behaupten, dies wäre der intuitivste Zugang zur Nichtstandard Analysis, man wird allerddings den Verdacht nicht los, dass diese Leute wahrscheinlich vor allem Logiker, und weniger Analytiker oder Anwender der Theorie sind.

Erfreulich an dieser Konstruktion ist, dass alles auf ein Mal "nichtstandard"-isiert wird. Es ist also nicht nötig, die ganze Analysis nochmals neu auf der Grundlage von $*\mathbb{R}$ aufzubauen. Allerdings hat diese Allgemeinheit auch einen Preis: für den gewöhnlichen Anwender wird die Nichtstandard-Analysis auf diese Weise nicht wirklich zugänglicher. Für ihn ist die Arbeit mit den Axiomen IST eher schwieriger, und er muss genauso hart arbeiten, um die Konsequenzen der Axiome für die Analysis zu verstehen.

4 Ultragrosse und ultrakleine Zahlen

Kann man Nichtstandard-Analysis ohne den logischen Ballast machen, und gleichzeitig eine Form der Analysis bekommen, die für die Praxis "intuitiver" ist als die

Nichstandard-Analysis der Logiker? Und wenn wir schon dabei sind, welche weiteren Anwenderwünsche könnten wir erfüllen?

Ein Aspekt wurde bisher nämlich noch nicht beachtet. Die Praktiker sind sich gewohnt, in verschiedenen Grössenskalen zu denken. Effekte in der atomaren Skala sind für makroskopische Einflüsse uninteressant, und die klumpige Natur von Sternen ist für das Studium des Universums als ganzem wenig wichtig, die Sterne bilden ein 'Gas'. Dieses Beispiel wie auch Eulers Berechnung der Exponentialreihe zeigen, dass die Nichtstandard Analysis nicht nur zwischen inifinitesimalen Grössen und standard-Grössen unterscheiden sollte, sondern auch zwischen verschiedenen Grössenskalen.

Wir wünschen uns also ein Axiomensystem, welches von reellen Zahlen spricht, ein Konzept "Auflösung" besitzt und ausserdem möglichst direkt und ohne grosse logische Umschweife in der Praxis angewendet werden kann.

A priori ist nicht selbstverständlich, dass so etwas durchführbar ist. Eine Übersicht über Entwicklungen in diese Richtung wird in [1] gegeben, ebenso ein Überblick über die daraus entstehende Theorie. Letztere soll im folgenden zusammengefasst werden.

4.1 Auflösung

Als neues mathematisches Konzept führen wir die Auflösung ein, welche wir V schreiben. V ist keine Menge. Es sind nur die folgenden zwei Schreibweisen erlaubt:

$x \in \mathsf{V}$	x wird in der Auflösung V sichtbar
$\mathsf{V}_1 \subset \mathsf{V}_2$	Auflösung V_1 ist gröber als V_2, V_2 ist feiner als V_1

Die Schreibweise vermittelt zwar den oberflächlichen Eindruck, V sei ein Menge. Dem ist aber nicht so, wir nehmen die bekannte ZFC-Mengenlehre, und fügen die Auflösungen hinzu. Auflösungen können also a priori nicht zur Konstruktion von Mengen verwendet werden.

Die Bedeutung der Auflösung wird implizit durch die Axiome gegeben. Auflösungen sollen geordnet sein, und zu einer Anzahl von Objekten gibt es eine gröbste Auflösung, in der man alle sehen kann.

Axiom 4.1. *Für $x_1, \ldots, x_n$ gibt es eine Auflösung $\mathsf{V}(x_1, \ldots, x_n)$ so, dass $x_i \in \mathsf{V}(x_1, \ldots, x_n) \forall i$. Werden alle x_i in der Auflösung V sichtbar, ist $\mathsf{V}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathsf{V}$.*

Axiom 4.2. *Sind V_1 und V_2 Aulösungen, gilt $\mathsf{V}_1 \subset \mathsf{V}_2$ oder $\mathsf{V}_2 \subset \mathsf{V}_1$.*

4.2 Ultragross und ultraklein

Eine Zahl ist ultraklein im Vergleich zu einer Auflösung V, wenn sie kleiner ist als alle positiven Zahlen, die man in dieser Auflösung sehen kann:

Definition 1. *Sei V eine Auflösung*

1. *Ein reelle Zahl ε heisst ultraklein relativ zu V, wenn $|\varepsilon| < r$ ist für alle $r > 0$, $r \in \mathsf{V}$.*
2. *Eine reelle Zahl x heisst ultragross relativ zu V, wenn $|x| > r$ ist für alle $r > 0$, $r \in \mathsf{V}$.*
3. *Eine Zahl, die nicht ultragross ist, heisst limitiert.*
4. *Zwei Zahlen a und b sind ultranahe relativ zu V, geschrieben $a \simeq_{\mathsf{V}} b$, wenn $a - b$ ultraklein relativ zu V ist.*

Das nächsten zwei Axiome stellen sicher, dass die Theorie nicht leer ist, dass sie aber auch nicht zu viele neue Zahlen enthalten, jede limitierte reelle Zahl soll eine Approximation in der Auflösung V haben.

Axiom 4.3. *In jeder Auflösung V gibt es nicht verschwindende ultrakleine und ultragrosse Zahlen relativ zu V.*

Axiom 4.4 (Nachbarschaftsprinzip)**.** *Zu jeder relativ zu V limitierten reelle Zahl x gibt es eine ultranahe reelle Zahl $r \in \mathsf{V}$: $x \simeq_{\mathsf{V}} r$.*

Die neue Theorie sollte die alte nicht grundsätzlich verändern. Insbesondere sollten Objekte, die in der klassischen Mengenlehre definiert werden konnten, weiterhin existieren.

Axiom 4.5. *(Abgeschlossenheit) Eine Zahl, Funktion, Operation oder Menge, die mit einer klassischen Formel, also ohne Verwendung von Auflösungen, definiert werden kann, wird in Auflösung V sichtbar, wenn alle Parameter in Auflösung V sichtbar sind. Ist φ eine klassische Formel und sind $y_i \in \mathsf{V}$, dann gilt*

$$\exists x\,(\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)) \quad \Rightarrow \quad \exists x \in \mathsf{V}\,(\varphi(x, y_1, \ldots, y_n))$$

Die Kontraposition dieses Axioms ist

$$\forall x \in \mathsf{V}\,\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \quad \Rightarrow \quad \forall x\,\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$$

Dies entspricht dem Transferaxiom in IST.

4.3 Rechnen

Zum Rechnen mit ultragrossen und ultrakleinen Zahlen brauchen wir geeignete Rechenregeln:

Proposition 1. *Relativ zu einer Auflösung* V *gilt*

1. *Sind x und y limitiert, dann auch $x \pm y$ und $x \cdot y$.*
2. *Sind δ und ε ultraklein, dann auch $\delta \pm \varepsilon$.*
3. *Ist ε ultraklein und x limitiert, dann ist $\varepsilon \cdot x$ ultraklein.*
4. *Sei $x \neq 0$, dann ist x ultragross genau dann, wenn $1/x$ ultraklein ist.*
5. *"ultranah" ist eine Äquivalenzrelation: $a \simeq a$, falls $a \simeq b$ dann auch $b \simeq a$, falls $a \simeq b$ und $b \simeq c$, dann auch $a \simeq c$*
6. $x \simeq a \wedge y \simeq b \Rightarrow x + y \simeq a + b$
7. *Sind a und b limitiert, dann gilt $x \simeq a \wedge y \simeq b \Rightarrow x \cdot y \simeq a \cdot b$*
8. *Falls $a, b \in \mathsf{V}$ dann $a \simeq b \Leftrightarrow a = b$.*

Beweis. 1. Da x und y limitiert sind, gibt es reelle Zahlen $u, v \in \mathsf{V}$ mit $|x| < u$ und $|y| < v$. Dann gilt $|x \pm y| \leq |x| + |v| < u + v$ und $|xy| = |x|\,|y| < uv$. Da $u + v \in \mathsf{V}$ und $uv \in \mathsf{V}$ sind, sind $x \pm y$ und xy limitiert.

2. Da δ ultraklein ist, ist $|\delta| < r/2$ für alle positiven Zahlen $r \in \mathsf{V}$, und analog für ε. Dann ist $|\delta \pm \varepsilon| \leq |\delta| + |\varepsilon| < r$ für alle $r > 0$ und $r \in \mathsf{V}$.

3. Da x limitiert ist, gibt es $r \in \mathsf{V}$ mit $|x| < r$. Da ε ultraklein ist, gilt $|\varepsilon| < s/r$ für alle positiven $s \in \mathsf{V}$. Dann ist aber auch $|\varepsilon x| < r \cdot s/r = s$ für alle positiven $s \in \mathsf{V}$, also ist εx ultraklein.

4. Ist x ultragross, dann gilt $|x| > 1/r$ für alle $r > 0$ mit $r \in \mathsf{V}$, also $|1/x| < r$ für alle $r > 0$ mit $r \in \mathsf{V}$. Ist umgekehrt x ultraklein, dann ist $|x| < 1/r$ für alle $r > 0$ mit $r \in \mathsf{V}$, also auch $|1/x| > r$ für alle $r > 0$ mit $r \in \mathsf{V}$.

5. Da $a - a = 0 < r$ für alle $r > 0$, ist $a \simeq a$. $a \simeq b \Rightarrow |a - b| < r\ \forall r > 0 (r \in \mathsf{V}) \Rightarrow |b - a| < r\ \forall r > 0 (r \in \mathsf{V}) \Rightarrow b \simeq a$. $|a - c| = |a - b + b - c| \leq |a - b| + |b - c|$, beide Summanden auf der rechten Seite sind nach Voraussetzung ultraklein, und nach 2. auch deren Summe.

6. $|(x + y) - (a + b)| = |(x - a) + (y - b)| \leq |x - a| + |y - b|$, die letzte Summe ist wegen 2. ultraklein.

7. Aus $x - a \simeq 0$ folgt nach 3. $xy - ay = (x - a)y \simeq 0$ oder $xy \simeq ay$, und aus $y - b \simeq 0$ folgt $ay \simeq ab$, und damit mit der Transitivität $xy \simeq ab$.

8. Nur die Folgerung von links nach rechts ist interessant. Wäre $a \neq b$, wäre $a - b \in \mathsf{V}$, und damit auch $0 < r = |a - b| \in \mathsf{V}$. Dann wäre $|a - b| < r$ für eine positive Zahl in V, $a - b$ kann also nicht ultraklein sein.

$\square$

4.4 Stetigkeit

Definition 2. *Eine Funktion f heisst im Punkt x stetig, falls $f(y) \simeq f(x)$ für jedes $y \simeq x$.*

Zusammen mit den Rechenregeln folgen die bekannten Sätze über stetige Funktionen jetzt fast trivial:

Satz 2. *Sind f und g stetig in x, dann auch $f \pm g$ und $f \cdot g$.*

Beweis. Aus $f(y) \simeq f(x)$ und $g(y) \simeq g(x)$ folgt nach den Proposition 1, 6., dass $f(y) + g(y) \simeq f(x) + g(x)$. Die Behauptung für das Produkt folgt aus 6. in Proposition 1. 6. erfordert allerdings, dass die Funktionswerte limitiert sind. Da aber $f(x), g(x) \in \mathsf{V}$ (Abgeschlossenheit), können auch $f(y)$ und $g(y)$ nicht unlimitiert sein. □

Viele Sätze der Analysis benötigen Kompaktheit als Voraussetzung, zum Beispiel der Extremwertsatz. Kompaktheit ist aber fundamental eine Endlichkeitsbedingung, und daher ist es nicht überraschend, dass man ein solches Problem auf ein endliches reduzieren kann, wobei die relevante natürliche Zahl ultragross ist.

Satz 3 (Extremwertsatz)**.** *Ist f eine Funktion die in jedem Punkt des Intervals $[a, b]$ stetig ist, dann nimmt f in einem Punkt x des Intervals ein Maximum an.*

Beweis. Sei N eine ultragrosse Zahl. Unter den Funktionswerten

$$f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right), \qquad 0 \le k \le N$$

gibt es einen maximalen, sei x_n der zugehörige x-Wert. Sei x der eindeutig bestimmte Wert $x \in \mathsf{V}$, der ultranah bei x_n ist.

Da jeder andere Wert y ultranah bei einem x_k ist, ist $f(y) \simeq f(x_k)$. Für jedes $y \in \mathsf{V}$ im Interval gilt

$$f(y) \simeq f(x_k) \le f(x_n) \simeq f(x)$$

Im schlimmsten Fall könnte also $f(y) > f(x)$ und $f(y) \simeq f(x)$ sein. Da aber $f(y) \in \mathsf{V}$ und $f(x) \in \mathsf{V}$ sind, müssen dann auch $f(y) = f(x)$, sein. In allen anderen Fällen ist $f(y) \le f(x)$. Aus dem Abschlossenheitsaxiom folgt jetzt aber, dass $f(y) \le f(x)$ für alle y, nicht nur $y \in \mathsf{V}$. □

4.5 Ableitung

Wir möchten jetzt die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x definieren. Dazu möchten wir einen Differenzenquotienten bilden mit einer ultrakleinen Differenz. Welche Auflösung soll dazu verwendet werden? Axiom 4.1 garantiert, dass es eine gröbste Auflösung $\mathsf{V}(f, x)$ gibt, in der man f und x sieht.

Definition 3. *Ist f eine Funktion und a ein innerer Punkt ihres Definitionsbereichs, und gibt es eine Zahl $L \in \mathsf{V}$ mit*

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \simeq L \qquad \text{für alle ultrakleinen } dx \neq 0,$$

dann heisst L die Ableitung von f an der Stelle x, $f'(x) = L$.

Man kann die Ableitung von $f(x) = x^2$ sofort ausrechnen

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{x^2+2x\,dx+(dx)^2-x^2}{dx} = 2x+dx \simeq 2x.$$

Eine gewisse Unsicherheit besteht allerdings noch. Könnte sich die Ableitung eventuell ändern, wenn man sie in einer anderen Auflösung berechnet? Die bisherigen Axiome garantieren dies noch nicht.

Axiom 4.6 (Stabiltätsprinzip)**.** *Ist $\varphi(x_1,\dots,x_n,\mathsf{V})$ eine Formel mit freien Variablen $x_1,\dots,x_n$ und einer Auflösung V, dann gilt*

$$\varphi(x_1,\dots,x_k,\mathsf{V}_1) \quad\Leftrightarrow\quad \varphi(x_1,\dots,x_n,\mathsf{V}_2).$$

für zwei beliebige Auflösungen mit $x_1,\dots,x_n \in \mathsf{V}_1$ und $x_1,\dots,x_n \in \mathsf{V}_2$.

4.6 Interne Mengen

Das Stabilitätsprinzip hat eine unbeabsichtigte Konsequenz. Sei $\varphi(n)$ eine Formel für natürlich Zahlen, zum Beispiel

$$\varphi(n) := \Bigl(\sum_{k=1}^{n} i - \frac{n(n+1)}{2} = 0\Bigr)$$

Eine solche Formel würde man normalerweise mit vollständiger Induktion beweisen. Man versucht dabei zu zeigen, dass $A = \{n \mid n > 0 \wedge \varphi(n)\}$. Dazu muss man verifizieren, dass $1 \in A$ und dass aus $k \in A$ auch $k+1 \in A$ folgt. Wenn wir diesen Beweis relativ zu einer Auflösung V machen wollen, muss $1 \in \mathsf{V}$ sein. Und der Induktionsschluss verwendet, dass $k \in \mathsf{V}$ und $k \in A$ ist, und schliesst dann, dass $k+1 \in A$ ist, aber das Stabilitätsprinzip sagt, dass auch $k+1 \in \mathsf{V}$ sein wird. Der Induktionsschluss ist also nur möglich für die Elemente von A, die in der Auflösung V sichtbar werden, nicht für ganz $\mathbb{N}$. Wir brauchen also noch ein weiteres Axiom, welches sicherstellt, dass durch $\{x \mid \varphi(x)\}$ eine Menge definiert wird. Dies ist nicht immer möglich, da Formeln, die Auflösungen referenzieren, nicht unbedingt zur Konstruktion von Mengen geeignet sind. Glücklicherweise kann man den Formeln ansehen, ob sie geeignet sind:

Definition 4. *Eine Formel $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ heisst intern, wenn sie keine Auflösungen referenziert oder wenn alle vorkommenden Auflösungen feiner sind als $\mathsf{V}(x_1,\dots,x_n)$.*

Technisch bedeutet das, dass die einzigen erlaubten Quantoren über Auflösungen von der Form

$$\exists \mathsf{V}' \ (\mathsf{V}(x_1,\dots,x_n) \subset V' \wedge \dots)$$

sind. Interne Formeln sind dazu geeignet, Mengen zu definieren, dank des folgenden Axioms.

Axiom 4.7 (Definitionsprinzip)**.** *Ist $\varphi(x, x_1,\dots,x_n)$ eine interne Formel und ist A eine Menge, dann gibt es eine Menge B mit*

$$\forall x\, (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x, x_1,\dots,x_n)).$$

4.7 Exponentialreihe

Wir haben schon in der Einleitung auf die Schwierigkeiten in Eulers Argument zur Exponentialreihe hingewiesen. Eine unendliche Summe unendlich kleiner Grössen könnte durchaus einen endlichen Wert liefern. Wir haben auch angemerkt, dass man damals argumentiert hätte, dass die beiden unendlich grossen Zahlen sich verschieden schnell gegen unendlich bewegen. Mit ultragrossen Zahlen können wir dies formulieren, wenn wir wissen, dass es genügend verschiedene Auflösungen gibt. Dazu dient das nächste Axiom

Axiom 4.8 (Dichtheit der Auflösungen)**.** *Falls eine relle Zahl $\varepsilon \neq 0$ ultraklein relativ zu V ist, aber in der Auflösung V' sichtbar ist (es ist notwendigerweise $\mathsf{V} \subset \mathsf{V}'$), dann gibt es eine Auflösung V^+ und eine Zahl $\delta \neq 0, \delta \in \mathsf{V}^+$, so dass δ ultraklein ist relativ zu V und ε ultraklein relativ zu V^+.*

Das Axiom besagt also, dass es zwischen der Auflösung V und der Auflösung der Zahl ε noch eine weitere Auflösung V^+ gibt, so dass ε immer noch ultraklein relativ zu V^+ ist. Ausserdem gibt es eine in Auflösung V^+ sichtbare Zahl, die relativ zu V ultraklein ist.

Etwas allgemeiner sagt es, dass wir beliebig viele Zwischenauflösungen finden können, und Zwischenzahlen, die in diesen Auflösungen sichtbar sind, aber relativ zu den gröberen Auflösungen ultraklein sind. Dies ist genau, was wir zur Reparatur von Eulers Argument brauchen.

Sie N eine relativ zu V ultragrosse Zahl, für die wir

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{N(N-1)\dots(N-(k-1))}{k!} \cdot \frac{x^k}{N^k}$$

schreiben können. Jetzt gibt es eine ultragrosse Zahl M und eine Auflösung V^+, in der M erscheint, bezüglich der N immer noch ultragross ist. Dann können wir schreiben

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = \sum_{k=0}^{M} \frac{1\cdot(1-1/N)\ldots(1-(k-1)/N)}{k!}\cdot x^k + \sum_{k=M+1}^{N} \frac{N(N-1)\ldots(N-(k-1))}{k!}\cdot\frac{x^k}{N^k}$$

Die Faktoren in der ersten Summe sind in der Auflösung V^+ von M alle ultranahe bei 1. In dieser Auflösung ist M limitiert, wir haben eine limitierte Summe von Termen, die relativ zu V^+ ultranahe bei $x^k/k!$ sind, also ist die erste Summe

$$\sum_{k=0}^{M} \frac{1\cdot(1-1/N)\ldots(1-(k-1)/N)}{k!}\cdot x^k \simeq_{\mathsf{V}^+} \sum_{k=0}^{M}\frac{x^k}{k!}.$$

Für die zweite Summe gilt

$$0 \leq \sum_{k=M+1}^{N} \frac{N(N-1)\ldots(N-(k-1))}{k!}\cdot\frac{x^k}{N^k} \leq \sum_{k=M+1}^{N}\frac{x^k}{k!} \simeq_{\mathsf{V}} 0.$$

Auf der rechten Seite steht ein relativ zu V ultrakleines Reststück der als konvergent bekannten Exponentialreihe. Also folgt

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N \simeq_{\mathsf{V}} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

4.8 De l'Hospitals Regel

De l'Hospitals Regel besagt, dass man an einer Stelle a, wo $f(x)$ und $g(x)$ beide divergieren, den Grenzwert des Quotienten als

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

berechnen kann, falls dieser Grenzwert existiert. Wir wollen diese Aussage mit Hilfe ultrakleiner Zahlen beweisen.

Der Grenzwert auf der rechten Seite existiert, wir bezeichnen ihn mit l. Für eine Zahl x, die ultranahe bei a ist, gilt

$$l \simeq_{\mathsf{V}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Wir nehmen an, dass $x > a$, berechnen also den rechtsseitigen Grenzwert, der linksseitige geht analog. Wir wählen jetzt ein Auflösung V^+, in der x immer noch ultranah bei a ist, und eine Zahl y, so dass $y - a \in \mathsf{V}^+$, aber $y \simeq_{\mathsf{V}} a$ ist. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

für ein ξ mit $x < \xi < y$. Natürlich ist $\xi \simeq_{\mathsf{V}} a$, die rechte Seite ist also ultranah bei l.

Da f und g bei a divergieren, ist $f(x)$ und $g(x)$ ultragross relativ zu V^+, $f(y)$ und $g(y)$ sind aber limitiert relativ zu V^+. Dann gilt

$$l \simeq_{\mathsf{V}} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - f(y)/f(x)}{1 - g(y)/g(x)} \simeq_{\mathsf{V}^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Literatur

[1] K. Hrbacek, O. Lessmann, R. O'Donovan, Analysis with Ultrasmall Numbers, *Amer. Math. Monthly* **117** (2010) 801-816. `doi:10.4169/000298910X521661`

[2] E. Nelson, Internal Set Theory: a new approach to Nonstandard Analysis *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977) 1165-1198.

[3] A. Prestel, *Non-Standard Analysis*, in H.-D. Ebbinghaus et. al. *Zahlen*, Band 1 der Reihe 'Grundwissen Mathematik', Springer-Verlag, Berlin, 1983

[4] A. Robert, *Analyse non standard*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1985.